Лекция 14. КАФТ геометриялық әдістері

Жоспар:

1. Сызықтық бейнелеу
2. Бөлшекті-сызықтық бейнелеу
3. Негізгі қарапайым функциялармен орындалатын конформды бейнелеулер
4. Мысалдар

Анықтама. Егер z_0 нүктесінің аймағын w_0 нүктесінің аймағына $w = f(z)$ функциясы арқылы бейнелеу барысында, z_0 нүктесінде сызықтар арасындағы бұрыштың сақталу және созылудың тұрақтылығы қасиеттері орындалса, онда $w = f(z)$ бейнелеуі *конформды* деп аталады.

Тұжырым. $w = f(z)$ бейнелеуі D облысында конформды болуы үшін, осы облыста $w = f(z)$ функциясы бірбетті және аналитикалық, сонымен қатар кез келген $z \in D$ үшін $f'(z) \neq 0$ болуы *қажетті және жеткілікті*.

1-мысал. Келесі бейнелеулер қандай облыстарда конформды болады?

a) $w = 3z + 2i$, b) $w = 2z^2 + 4i$, c) $w = sh(1 - z)$.

Шешуі. a) $f(z) = 3z + 2i$ функциясы бүкіл комплекс жазықтықта аналитикалық және бірбетті, сонымен қатар $f'(z) = 3 \neq 0$ болғандықтан, берілген бейнелеу бүкіл комплекс жазықтықта конформды болады.

b) $w = 2z^2 + 4i$ бейнелеуі $z = 0$ нүктесінен басқа нүктелердің бәрінде конформды, себебі $f'(z) = 4z$ туындысы $z = 0$ нүктесінде нөлге тең.

c) $w = sh(1 - z)$ функциясының туындысы $w' = -ch(1 - z)$ тең.

Енді туындының нөлге тең болатын нүктелерін табайық.

$$ch(1 - z) = 0 \Rightarrow e^{1-z} + e^{z-1} = 0$$

$$e^{2z-2} = -1 \Rightarrow 2z - 2 = (2k + 1)\pi i,$$

$$z = 1 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Демек, $w = sh(1 - z)$ бейнелеуі $z = 1 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ нүктелерінен басқа нүктелердің бәрінде конформды.

1. Сызықтық бейнелеу

$w = az + b$ сызықтық функциясы, мұнда a мен b – тұрақты комплекс сандар, $(a \neq 0)$, бүкіл z жазықтығын бүкіл w жазықтығына конформды бейнелейді, себебі кез келген z үшін $w' = a \neq 0$.

Сызықтық бейнелеудің C жиынында бірбетті екендігі келесі теңдіктен шығады: $w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2)$, егер $a \neq 0$, $z_1 \neq z_2$ болса, онда $w_1 \neq w_2$. Демек, сызықтық бейнелеу бүкіл C жазықтығында конформды.

Сызықтық бейнелеудің геометриялық мағынасы.

a параметрін көрсеткіштік түрде жазып, $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$, сызықтық бейнелеудің дербес жағдайларын бөліп қарастырайық:

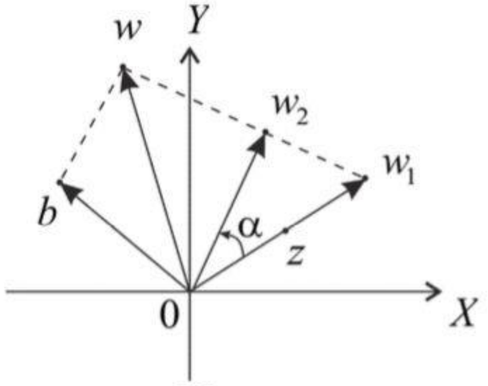
$$1)\ w_1 = |a| \cdot z; 2)\ w_2 = e^{i\alpha} \cdot w_1; 3)\ w = w_2 + b.$$

Бірінші бейнелеуге кез келген нүктенің радиус-векторы ұзындығының өзгеруі сәйкес келеді, егер $|a| > 1$ болса, онда $|a|$ ретке *созылу*, ал егер $|a| < 1$ болса, онда *сығылу*.

Екінші бейнелеу үшін $|w_1| = |w_2|$, $\arg w_2 = \arg w_1 + \alpha$ қатынастарынан көретініміз: егер $\alpha > 0$ болса, онда кез келген w_1 нүктесінің радиус-векторы координаталар басымен салыстырғанда сағат бағытымен α бұрышқа бұрылады, ал егер $\alpha < 0$ болса, онда керісінше.

$w = w_2 + b$ бейнелеуінің геометриялық мағынасы комплекс сандарды қосудың геометриялық мағынасынан шығады. $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Re} b$, $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} w_2 + \operatorname{Im} b$ қатынастарын ескерсек, онда $w = w_2 + b$ бейнелеуі, кез келген w_2 нүктесінің радиус-векторын b векторының бағыты бойынша, осы b векторының ұзындығына параллель көшіру.

Жоғарыдағы үш бейнелеуді 22-суреттен көруге болады.

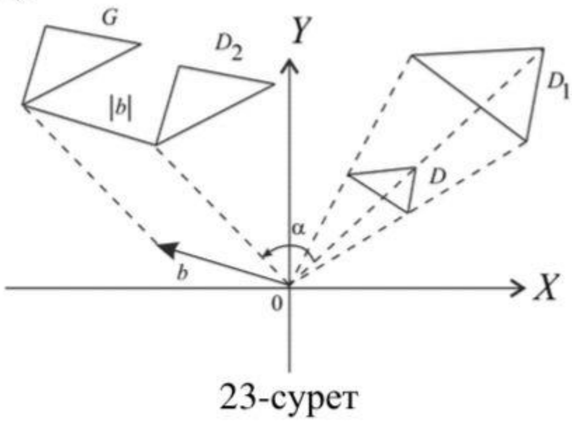


22-сурет

Сонымен $w = az + b$ сызықтық бейнелеуін жоғарыдағы үш бейнелеудің суперпозициясы ретінде қарастыра отырып, келесі тұжырымға келеміз.

Тұжырым. 1. $w = az + b$ сызықтық бейнелеуі дегеніміз, z жазықтығындағы кез келген нүктенің радиус-векторын $|a|$ рет созуды (сығуды), $\alpha = \arg a$ бұрышына бұруды және b векторының бағытымен $|b|$ шамасына жылжытуды (параллель көшіруді) білдіреді.

2. $w = az + b$ бейнелеуі жазықтықтағы кез келген фигураның сызықтық өлшемдерін $|a|$ ретке өзгертеді,фигураны бас нүктенің маңында $\alpha = \arg a$ бұрышына бұрады және оны b векторының бағытына $|b|$ шамасына жылжытады (23-сурет).

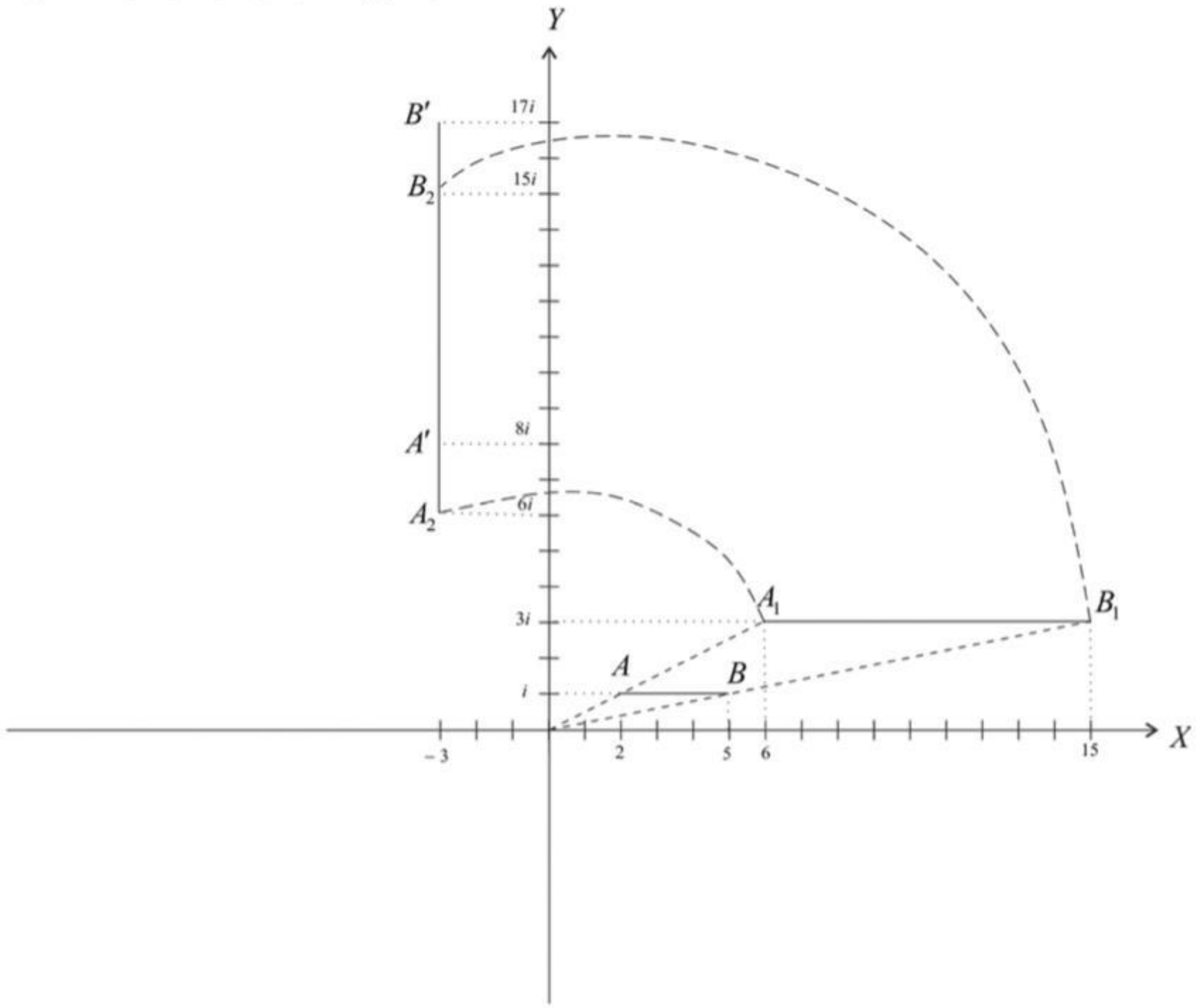


23-сурет

3. Сызықтық бейнелеу z жазықтығындағы түзу мен шеңберді сәйкес w жазықтығындағы түзу мен шеңберге аударады (және керісінше). Бұл қасиетті

дөңгелектік қасиет деп атайды.

2-мысал. AB түзуінің $w = 3iz + 2i$ бейнелеуі кезіндегі образын табыңыз, мұнда $A(2;1)$, $B(5;1)$. (24-сурет).



24-сурет

Шешуі. Сызықтық бейнелеудің дөңгелектік қасиеті бойынша түзудің образы түзу болады. Олай болса, бізге екі нүктені тапсақ жеткілікті.

$A(2;1)$ нүктесінің образы A' болады:

$$w = 3i(2 + i) + 2i = 6i - 3 + 2i = -3 + 8i$$

Демек, $A'(-3;8)$.

$B(5;1)$ нүктесінің образын табайық.

$$w = 3i(5 + i) + 2i = 15i - 3 + 2i = -3 + 17i$$

Олай болса, $B'(-3;17)$.

Сонымен, AB түзуінің образы $A'B'$ болады, мұнда $A'(-3;8)$, $B'(-3;17)$. (24-сурет).

Енді геометриялық жолмен көрсетейік.

Берілген сызықты бейнелеуді үшке бөліп жазамыз.

$$w_1 = 3z,\ w_2 = iw_1,\quad w = w_2 + 2i$$

AB түзуінің образы $w_1 = 3z$ бейнелеуі кезінде A_1B_1 болады ($k = 3$ кез келген нүктенің радиус-векторын 3 есе созу) A_1B_1 кесіндісінің $w_2 = iw_1$ бейнелеуі кезінде образы A_2B_2 болады, мұнда $A_2(-3;\,6), B_2(-3;\,15)$. A_2B_2 кесіндісі A_1B_1 кесіндісін бас нүкте маңында $\alpha = \arg i = \dfrac{\pi}{2}$ бұрышқа бұрғанда шығады. Ең соңында $A'B'$ кесіндісі A_2B_2 кесіндісін 2 бірлікке жоғары жылжыту кезінде пайда болады, себебі $w = w_2 + 2i$.

Жоғарыда айтылғандардың бәрі 24-суретте көрсетілген.

3-мысал. $|z+1| = 2$ шеңберінің $w = 2iz + 4i$ бейнелеуі кезіндегі образын табыңыз.

Шешуі. $w = 2iz + 4i$ теңдеуінен z – ті тауып аламыз. $z = \dfrac{w-4i}{2i}$. Табылған $z = \dfrac{w-4i}{2i}$ өрнегін $|z+1| = 2$ шеңбердің теңдеуіне қоямыз.

$$\left|\frac{w-4i}{2i} + 1\right| = 2 \ \Rightarrow \left|\frac{w-2i}{2i}\right| = 2 \quad \Rightarrow\ |w-2i| = 4$$

2-мысалдағыдай геометриялық жолмен де көрсетуге болады.

4-мысал. $|z-2i| = 1$ шеңберін $|w-1| = 2$ шеңберіне бейнелейтін сызықтық функцияны табыңыз.

Шешуі. Бұл есеп 3-мысалдағы есепке кері есеп. Геометриялық мағынасын ескере отырып шығарамыз.

Алдымен шеңбердің центрін координаталар бас нүктесіне көшіреміз. Ол үшін $w_1 = z - 2i$ бейнелеуін қолданамыз. w_1 жазықтығында 2 есе созуға мүмкіндік беретін бейнелеу жасаймыз: $w_2 = 2w_1$.

Ең соңында жылжыту түрлендіруін қолдансақ, онда $w = w_2 + 1$, демек,

$$w = 2(z-2i) + 1 \text{ немесе } w = 2z + 1 - 4i$$

Есептің жауабы жалғыз емес. Іздеп отырған бейнелеуді $w = az + b$ түрінде іздесек, онда $w_0 = az_0 + b$, мұнда $w_0 = 1,\ z_0 = 2i$, демек, $1 = 2ai + b,\ b = 1 - 2ai$.

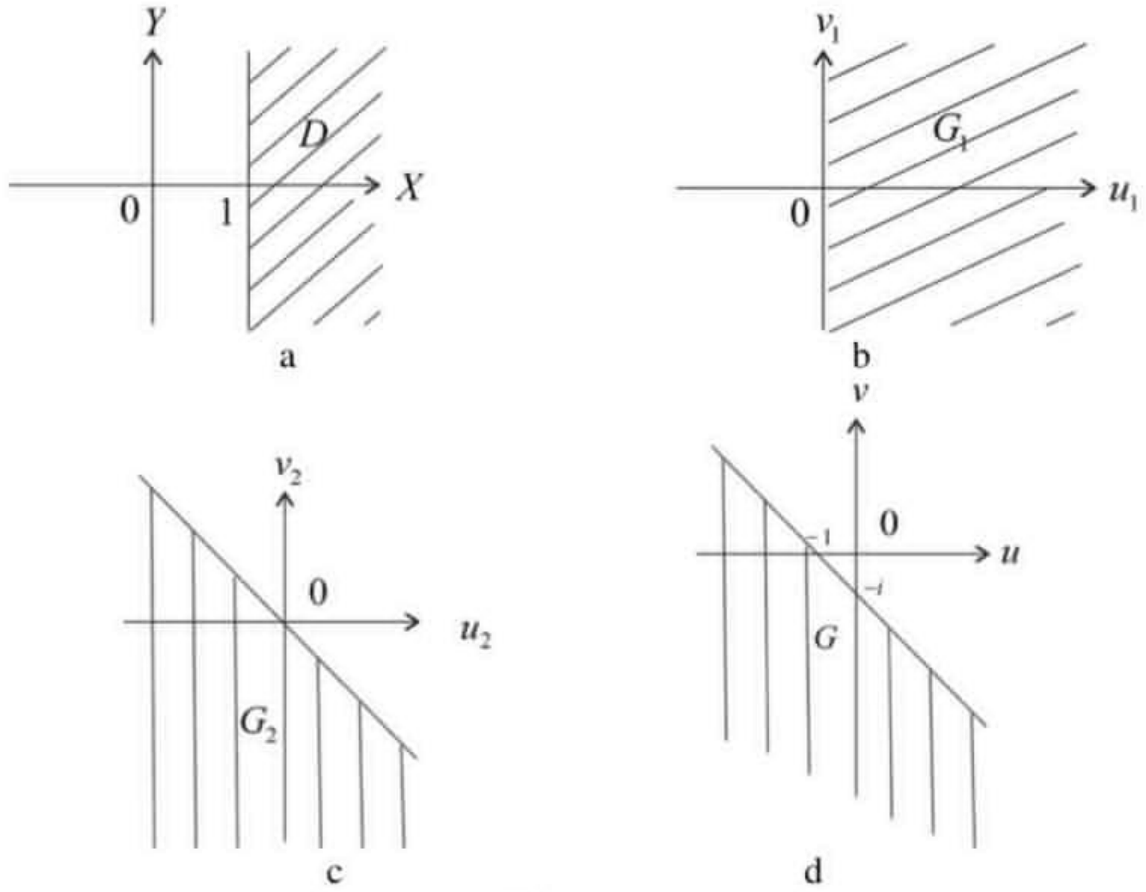
Онда $w = az + 1 - 2ai \ \Rightarrow\ w - 1 = a(z-2i)$.

Егер $|w+1| = |a|\cdot|z-2i|$ және $|a| = 2,\ a = 2e^{i\alpha}$ ($\alpha -$ кез келген нақты сан) екенін ескерсек, онда жауабы: $w = 2e^{i\alpha}(z-2i) + 1$.

Соңғы жауаптың дұрыстығын, центрі бас нүктеде жатқан шеңбердің түрі α бұрышқа бұрғаннан өзгермейтіндігімен түсіндіруге болады.

5-мысал. $D: \operatorname{Re} z > 1$ облысын $G: \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w + 1 < 0$ облысына бейнелейтін сызықтық функцияны табыңыз.

Шешуі. $z-$ жазықтығындағы $\operatorname{Re} z = 1$ түзуін $w-$ жазықтығындағы $\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w + 1 = 0$ түзуіне бейнелейтін функцияны табу керек (25-сурет, a,d)



25-сурет

Геометриялық әдісті қолданамыз.

1) Алдымен Dоблысын солға бір өлшемге жылжытамыз: $w_1 = z - 1$. D облысының образы G_1 облысы болады (25-сурет, b).

2) G_1облысын $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ бұрышына сағат бағытымен бұрамыз: $w_2 = e^{-\frac{3\pi}{4}i} w_1$. Бұл жағдайда G_1облысының образыG_2 облысы болады (25-сурет, c).

3) G_2облысын бір өлшемге төмен жылжытамыз: $w = w_2 - i$. G_2 облысының образыG облысы болады (25-сурет, d).

Үш функцияның сиперпозициясы іздеп отырған бейнелеуді береді. Сонымен, жауабы: $w = e^{-\frac{3\pi}{4}i}(z-1) - i$.

Ескерту. Қосымша шартсыз мұндай есептердің шешімі жалғыз емес.

Мысалы, $w = e^{-\frac{3\pi}{4}i}(z-1) - 1$ функциясы да берілген есептің шешімі болатынын тексеріп көруге болады.

2. Бөлшекті-сызықтық бейнелеу

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$функциясы *бөлшекті-сызықтық бейнелеу* деп аталады, мұнда a, b, c, d – кез келген комплекс сандар.

$c \neq 0$ деп есептейміз, себебі $c = 0$ болса, жоғарыда қарастырған сызықтық функция шығады. Сонымен қатар, $ad-bc\neq 0$, себебі $ad-bc=0$ болса, онда бөлшектің алымы мен бөлімінің пропорционалдығынан $w=k=const$ функциясы шығады.

Функция $\mathbf{C}\setminus\left(-\frac{d}{c}\right)$ жиынында анықталған. Егер $w\left(-\frac{d}{c}\right)=\lim\limits_{z\to-\frac{d}{c}}w(z)=\infty$, $w(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\frac{a}{c}$ деп есептесек, онда бүкіл кеңейтілген $\overline{\mathbf{C}}$ комплекс жазықтығында анықталған функцияны аламыз.

Берілген функция $\mathbf{C}$ жазықтығында бірбетті және $\mathbf{C}\setminus\left(-\frac{d}{c}\right)$ жиынында аналитикалық, олай болса бөлшекті-сызықтық бейнелеу $\mathbf{C}$ жазықтығында конформды.

Кез келген $z\in\mathbf{C}$, $z\neq-\frac{d}{c}$ үшін $w'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$ екенін байқау қиын емес.

Берілген функцияны түрлендірейік.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}=A+\frac{B}{cz+d},$$

мұнда $A=\frac{a}{c}$, $B=\frac{bc-ad}{c}$.

Демек, бөлшекті-сызықтық бейнелеуді сызықтық бейнелеу мен $w=\frac{1}{z}$ бейнелеуінің суперпозициясы түрінде жазуға болады екен.

Шынында, $w=\frac{az+b}{cz+d}$ бейнелеуін келесі үш бейнелеуарқылы жазуға болады: $w_1=cz+d$, $w_2=\frac{1}{w_1}$, $w=A+Bw_2$.

$w=\frac{1}{z}$ бейнелеуін жеке қарастырайық. Бұл бейнелеу бөлшекті-сызықтық бейнелеудің $a=0$, $b=1, d=0$, $c=1$ болғандағы дербес жағдайы.

$w=\frac{1}{z}$ бейнелеуін келесі түрде жазуға болады: $w_1=\frac{1}{\overline{z}}$, $w=\overline{w_1}$.

$w_1=\frac{1}{\overline{z}}$ бейнелеуі үшін $|w_1|=\frac{1}{|\overline{z}|}$, $\arg w_1=-\arg\overline{z}$ теңдіктері орындалады. Егер $|\overline{z}|=|z|$, $\arg\overline{z}=-\arg z$ екенін ескерсек, онда

$$|w_1|\cdot|z|=1,\ \arg w_1=\arg z \tag{19.1}$$

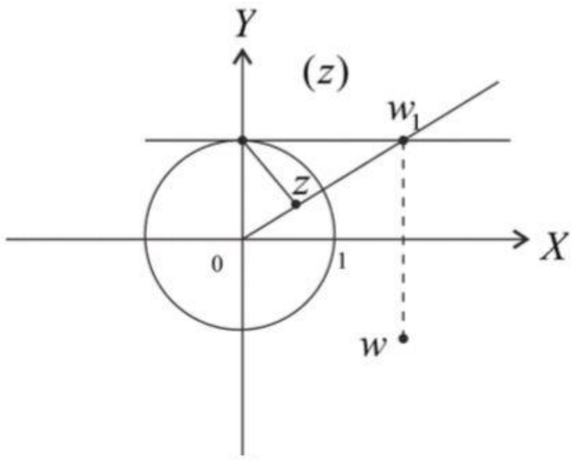
Соңғы екі қатынастың геометриялық мағынасы: w_1 және z нүктелері бір сәуленің бойында орналасқан және олардың радиус-векторларының ұзындықтарының көбейтіндісі бірге тең.

(19.1) – қасиетті қанағаттандыратын нүктелерді, центрі бас нүктеде жататын, радиусы бірге тең шеңбермен салыстырғанда *симметриялы* деп атайды.

$w_1 = \frac{1}{\bar{z}}$ функциясы бірлік дөңгелектің ішінде жатқан нүктені бірлік дөңгелектің сыртындағы нүктеге бейнелейді, себебі $|z|<1$ теңсіздігінен $|w_1| = \frac{1}{|\bar{z}|} > 1$ шығады және керісінше.

Демек, $|w_1| = \frac{1}{|\bar{z}|}$ функциясы бірлік дөңгелектің ішін, сыртына көшіреді және керісінше. Мұндай түрлендірулерді бірлік шеңбермен салыстырғанда *инверсия* деп атайды.

Берілген z нүктесі $(|z|<1)$ бойынша w_1 нүктесін салу үшін, $|z|=1$ шеңберінің центрінен z нүктесінен өтетін сәуле жүргізіп, сонан соң z нүктесінен сәулеге перпендикуляр тұрғызып және осы перпендикулярдың шеңбермен қиылысқан нүктесінен жанама жүргізу керек. Жанама мен сәуленің қиылысқан нүктесі w_1 нүктесі болады (26-сурет).



26-сурет

Осы салуды кері ретпен орындаса, онда дөңгелектің сыртында жатқан нүктеге симметриялы дөңгелектің ішіндегі нүктені табуға болады.

Геометриялық тұрғыдан $w = \overline{w_1}$ бейнелеуі, ол нақты осьпен салыстырғанда симметриялы нүкте (26-сурет).

Сонымен, жоғарыдағы айтылғандарды қорыта келе келесі тұжырымды жазайық.

Тұжырым. 1. Геометриялық тұрғыдан $w = \frac{1}{z}$ бейнелеуі, $|z|=1$ шеңберімен салыстырғанда инверсия мен нақты осьпен салыстырғанда симметрияға келтіріледі.

2. Геометриялық тұрғыдан бөлшекті-сызықтық бейнелеу созу, бұру, жылжыту (сызықтық бейнелеуді қараңыз) бейнелеуіне $|z|=1$ шеңберімен салыстырғанда инверсияға және нақты осьпен салыстырғанда симметрияға келтіріледі.

Бөлшекті-сызықтық бейнелеу үшін дөңгелектік қасиет орындалады.

Тұжырым. *(Бөлшекті-сызықтық бейнелеудің дөңгелектік қасиеті).*

1. $z=-\frac{d}{c}$ ерекше нүктесі арқылы өтпейтін шеңберлер мен түзулер шеңберге, ал ерекше нүкте арқылы өтетін шеңберлер мен түзулер – түзуге бейнеленеді.

2. Бөлшекті-сызықтық бейнелеу кеңейтілген комплекс жазықтықтың шеңберлерін $\overline{\mathbf{C}}$ жазықтығының шеңберіне аударады, себебі кеңейтілген комплекс жазықтықта түзу радиусы шексіздікке тең шеңбер деп есептеледі.

6-мысал. $w=\frac{4}{z}$ бейнелеуі кезінде

a) $x^2+y^2-4x=0$ және $(x-1)^2+y^2=4$ шеңберлерінің;

b) $x=2$ және $x=0$ түзулерінің образдарын табыңыз.

Шешуі. a) $x^2+y^2-4x=0$ шеңбері $z=0$ ерекше нүктесі арқылы өтеді, олай болса оның образы түзу болады.

Екінші шеңбердің образы шеңбер болады, себебі ол $z=0$ ерекше нүктесі арқылы өтпейды: $x^2+y^2-2x-3=0$.

Енді шеңберлерді комплекс түрде жазайық.

$$z\cdot\overline{z}-2(z+\overline{z})=0 \quad \text{және} \quad z\cdot\overline{z}-(z+\overline{z})=3$$

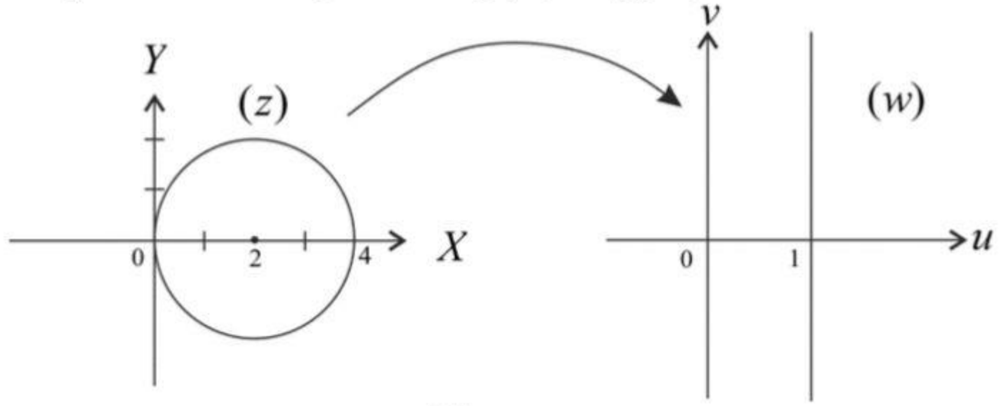
Мұнда біз $x^2+y^2=z\cdot\overline{z},\ x=\frac{z+\overline{z}}{2}$ екенін ескердік. z пен $\overline{z}$ орнына $z=\frac{4}{w},\ \overline{z}=\frac{4}{\overline{w}}$ қояйық.

Бірінші шеңбер үшін

$$\frac{16}{w\cdot\overline{w}}-8\cdot\frac{w+\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}=0 \text{ немесе } w+\overline{w}=2.$$

Демек, $\frac{w+\overline{w}}{2}=1 \Rightarrow \operatorname{Re}w=1$.

Бұл жорамал оське пареллель түзу (27-сурет).

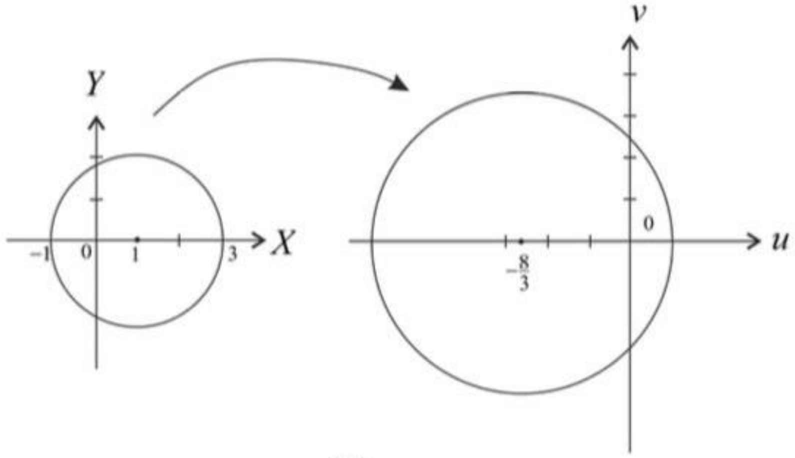


27-сурет

Екінші шеңбер үшін $3w\overline{w}+8(w+\overline{w})-16=0$. Бұл шеңбердің теңдеуі. Центрі мен радиусын табу үшін $w=u+iv,\ \overline{w}=u-iv,\ w\cdot\overline{w}=u^2+v^2,\ w+\overline{w}=2u$ екенін ескерсек, онда $3u^2+3v^2+16u-16=0$ теңдеуі шығады. Толық квадрат бөліп шығарайық:

$$\left(u+\frac{8}{3}\right)^2+v^2=\frac{112}{9}$$

Бұл, радиусы $\frac{\sqrt{112}}{3}$ – ке тең, центрі $\left(-\frac{8}{3};0\right)$ нүктесі болатын шеңбердің теңдеу (28-сурет).



28-сурет

b) $x=2$ түзуінің образы шеңбер, ал $x=0$ түзуінің образы түзу болады.

$x=2$ түзуін комплекс түрде жазайық:

$$z+\bar{z}=4$$

z пен $\bar{z}$ – орнына $z=\frac{4}{w}$, $\bar{z}=\frac{4}{\bar{w}}$ қойсақ, онда

$$\frac{4}{w}+\frac{4}{\bar{w}}=4 \Rightarrow w\cdot\bar{w}-(w+\bar{w})=0$$

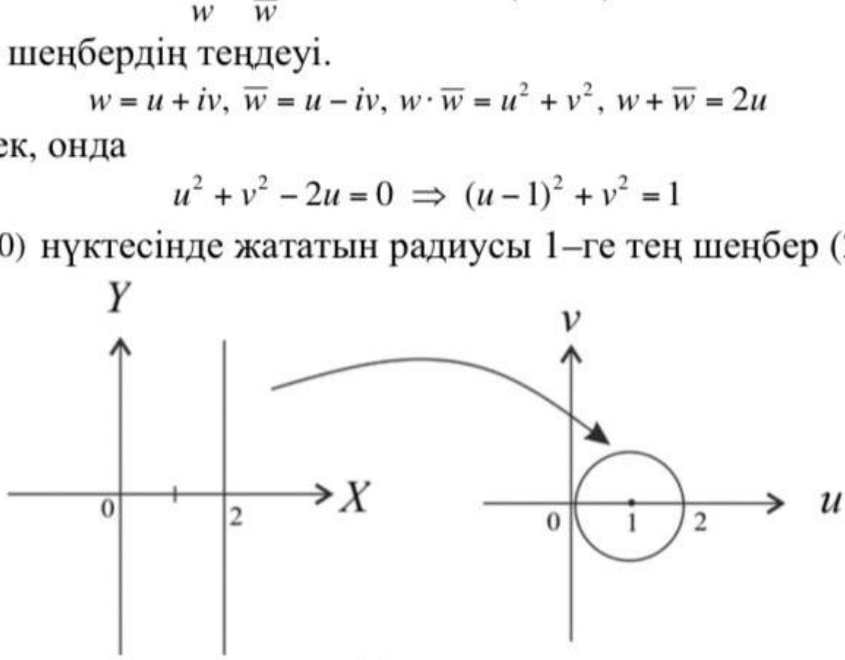
Соңғы теңдеу шеңбердің теңдеуі.

$$w=u+iv,\ \bar{w}=u-iv,\ w\cdot\bar{w}=u^2+v^2,\ w+\bar{w}=2u$$

екенін ескерсек, онда

$$u^2+v^2-2u=0 \Rightarrow (u-1)^2+v^2=1$$

Бұл центрі $(1;0)$ нүктесінде жататын радиусы 1–ге тең шеңбер (29-сурет).



29-сурет

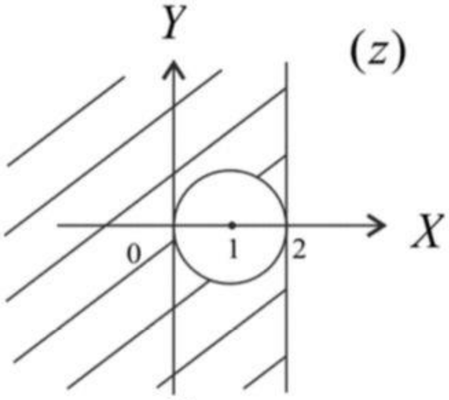
$x=0$ жорамал осьтің теңдеуінің комплекс түрі:

$$z+\bar{z}=0 \Rightarrow \frac{4}{w}+\frac{4}{\bar{w}}=0 \Rightarrow w+\bar{w}=0 \Rightarrow u=0 \text{ – түзудің теңдеуі}$$

Демек, z жазықтығындағы $x = 0$ жорамал осьтің теңдеуі $w = \frac{4}{z}$ бейнелеуі барысында w жазықтығында $u = 0$ жорамал осьтің теңдеуіне көшеді.

7-мысал. $D: \begin{cases} \operatorname{Re} z < 2 \\ |z-1| > 1 \end{cases}$ облысының $w = \frac{iz}{z-2}$ бейнелеуі кезіндегі образын табыңыз.

Шешуі. D облысы жарты жазықтық пен дөңгелектің сыртқы нүктелер жиынының қиылысуы (30-сурет).



30-сурет

D облысының $\operatorname{Re} z = 2$ түзуі мен $|z-1| = 1$ шеңберінен тұратын шекарасының образын табайық.

$w = \frac{iz}{z-2}$ бейнелеуі үшін $z = 2$ ерекше нүкте болып табылады.

$\operatorname{Re} z = 2$ түзуі мен $|z-1| = 1$ шеңбері $z = 2$ ерекше нүктесі арқылы өтетіндіктен, олардың образы түзулер болады.

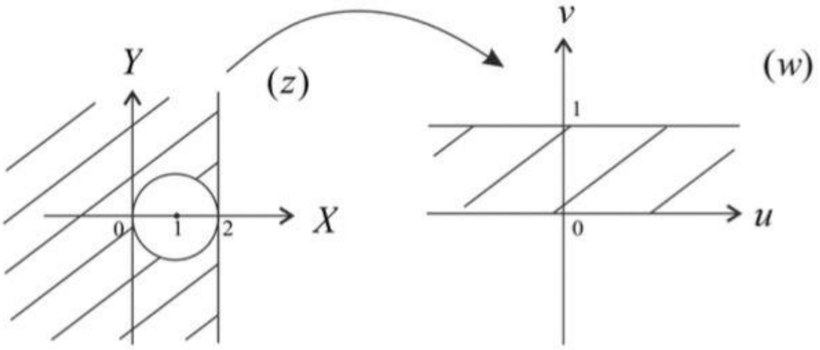
$\operatorname{Re} z = 2$ түзуінің образын табайық.

$\operatorname{Re} z = 2$ түзуінің теңдеуін комплекс түрде жазайық: $z + \bar{z} - 4 = 0$.

$w = \frac{iz}{z-2}$ теңдеуінен $z-$ ті табамыз. $wz - 2w = iz$, демек, $z = \frac{2w}{w-i}$, ал түйіндесін тапсақ $\bar{z} = \frac{2\bar{w}}{\bar{w}+i}$.

$z + \bar{z} - 4 = 0$ теңдеуіне қойсақ, онда $i\bar{w} - iw - 2 = 0$ немесе $w - \bar{w} = 2i$.

Бұл теңдеу накты оське параллель $\operatorname{Im} w = 1$ түзуін анықтайды (31-сурет).



31-сурет

Енді $|z-1| = 1$ шеңберінің образын табайық.

$|z-1|=1$ теңдеуіне z – тің орнына $z=\dfrac{2w}{w-i}$ мәнін қоямыз.

$$\left|\frac{2w}{w-i}-1\right|=1 \;\Rightarrow\; |w+i|=|w-i| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u^2+(v+1)^2=u^2+(v-1)^2 \;\Rightarrow\; v=0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Im} w=0$$

Бұл теңдеу нақты осьтің теңдеуі.

Сонымен, біз D облысының шекарасының екі параллель түзулерден тұратын ($\operatorname{Im} w=0$ және $\operatorname{Im} w=1$) образдарын таптық.

Енді D облысында жататын $z=-1$ нүктесін алып, образын табайық.

$w(-1)=\dfrac{i}{2}$; Бұл нүкте $\operatorname{Im} w=0$ және $\operatorname{Im} w=1$ пареллель түзулерінің арасында жатыр. Демек, $D:\begin{cases}\operatorname{Re} z<2\\ |z-1|>1\end{cases}$ облысының образы $0<\operatorname{Im} w<1$ жолағы болады.

Жоғарыда $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ бөлшекті-сызықтық бейнелеудің $c\neq 0$ болғанда қарастырылатыны айтылған. Олай болса,

$$w=\frac{\dfrac{a}{c}z+\dfrac{b}{c}}{z+\dfrac{d}{c}}=\frac{a_1z+b_1}{z+d_1},$$

мұнда $a_1=\dfrac{a}{c},\ b_1=\dfrac{b}{c},\ d_1=\dfrac{d}{c}$.

Демек, бөлшекті-сызықтық бейнелеу үш параметрмен анықталады екен.

Тұжырым. (Бөлшекті-сызықтық бейнелеуді анықтайтын шарт).

z жазықтығының қандай да бір z_1, z_2, z_3 үш әртүрлі нүктелері және w жазықтығының w_1, w_2, w_3 үш әртүрлі нүктелері үшін жалғыз бөлшекті-сызықтық бейнелеу $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ табылады және $w(z_k)=w_k,\ (k=1,2,3)$.

Сонымен қатар, келесі қатынас орындалады:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \tag{19.2}$$

Егер (19.2) теңдікте $z_k\to\infty$ немесе $w_k\to\infty$ $(k=1,2,3)$ шекке көшсек, онда қатынастың шегі бірге ұмтылады, мысалы, $\lim\limits_{z_1\to\infty}\dfrac{z-z_1}{z_3-z_1}=1$.

Олай болса, келесі салдарға келеміз.

Салдар. Егер z_k немесе w_k $(k=1,2,3)$ нүктелерінің біреуі шексіз алыс нүкте болса, онда соған сәйкес айырма бірмен алмастырылады.

8-мысал. $z_1=i,\ z_2=\infty,\ z_3=-2$ нүктелерін сәйкес $w_1=4i,\ w_2=2,\ w_2=\infty$ нүктелеріне бейнелейтін $w=f(z)$ бөлшекті-сызықтық функциясын табыңыз.

Шешуі. (19.2) – формуласы мен салдарды ескерсек, онда $z_2=\infty,\ w_3=\infty$ болғандықтан z_2 мен w_3 бар айырмаларды бірмен алмастырамыз. Онда

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{z-z_1}{z_3-z_1}$$

Демек,

$$\frac{w-4i}{w-2}=\frac{z-i}{-2-i}$$

Түрлендіре келе, іздеп отырған бейнелеуді табамыз: $w=\dfrac{2z-4+6i}{z+2}$;

Тұжырым. 1) Бөлшекті-сызықтық бейнелеу шекарасы берілген $z_k\ (k=1,2,3)$ үш нүктелері арқылы өтетін дөңгелекті, шекарасы $w_k\ (k=1,2,3)$ үш нүктелері арқылы өтетін дөңгелекке (немесе дөңгелектің сыртына) аударады. Себебі, жазықтықта кез келген шеңбердің орналасуы бірмәнді түрде үш нүктемен анықталады.

2) z_1 нүктесін нөлге және z_2 нүктесін шексіз алыс нүктеге аударатын кез келген бөлшекті-сызықтық бейнелеу келесі түрде жазылады:

$$w=A\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2} \tag{19.3}$$

Бұл формула (19.2) – формуласынан шығады.

9-мысал. $z_1=-5,\ z_2=4+3i,\ z_3=5$ нүктелері $w_1=-1,\ w_2=i,\ w_3=1$ нүктелеріне көшетіндей, $|z|<5$ дөңгелегін $|w|<1$ дөңгелегіне аударатын конформды бейнелеуді табыңыз.

Шешуі. $z_1=-5,\ z_2=4+3i,\ z_3=5$ нүктелері $|z|=5$ шеңберінің, ал $w_1=-1,\ w_2=i,\ w_3=1$ нүктелері $|z|=1$ шеңберінің бойында жатқандықтан, $|z|<5$ дөңгелегін $|z|<1$ дөңгелегіне аударатын конформды бейнелеу (19.2) – формуласымен табылады. Демек, іздеп отырған конформды бейнелеу – ол бөлшекті-сызықтық бейнелеу болып табылады.

(19.2) – формула бойынша

$$\frac{w+1}{w-i}\cdot\frac{1-i}{2}=\frac{z+5}{z-4-3i}\cdot\frac{1-3i}{10}\ \Rightarrow$$

$$5(1-i)(w+1)(z-4-3i)=(w-i)(z+5)(1-3i)\ \Rightarrow$$

$$w(5(1-i)(z-4-3i)-(z+5)(1-3i))=-i\,(1-3i)(z+5)-5(1-i)(z-4-3i)\ \Rightarrow$$

$$2w(2-i)(z-10)=2(2-i)(-2z+5)$$

Демек, жауабы: $w=\dfrac{-2z+5}{z-10}$;

Тұжырым 1. Бөлшекті-сызықтық бейнелеу, кеңейтілген комплекс жазықтықтағы шеңбермен салыстырғанда симметриялы кез келген екі нүктені, бейнелеу барысындағы осы шеңбердің образымен салыстырғанда симметриялы нүктелерге аударады.

Бұл қасиет симметриялы нүктелердің *сақталу* қасиеті деп аталады.

2. Бөлшекті-сызықтық бейнелеу кезінде облыстың (шеңбер немесе түзу) шекарасымен салыстырғанда симметриялы нүктелері, бейнелеу барысындағы шекараның образымен салыстырғанда симметриялы нүктелерге көшеді.

Анықтама. Егер z және z^* нүктелері шеңбердің центрінен шыққан бір сәуленің бойында жатса және шеңбердің центрінен ара қашықтықтарының көбейтіндісі осы шеңбердің радиусының квадратына тең болса, онда бұл екі нүкте $|z-z_0|=R$ шеңберімен салыстырғанда *симметриялы* (немесе *түйіндес*) деп аталады, демек,

$$|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=R^2 \tag{19.4}$$

теңдігі орындалады.

Шеңбердің центрі z_0 нүктесіне симметриялы нүкте, шексіз алыс нүкте деп есептейміз.

10-мысал. $|z-2i|<2$ облысын, 0 және $2i$ нүктелері қозғалмай қалатындай $|w+2i|>2$ облысына бейнелеңіз.

Шешуі. $w=f(z)$ бейнелеуі үшін z_0 нүктесінің қозғалмай қалуы $w(z_0)=z_0$ шартын білдіреді (немесе $z_0\to z_0$ деп те жазуға болады). Біздің жағдайда $w(0)=0,\ w(2i)=2i$ (демек $z_1=0,\ w_1=0;\ z_2=2i,\ \ w_2=2i$). Мұнда $z_1=0,\ w_1=0$ нүктелері шекаралық нүктелер, ал $z_2=2i, w_2=2i$ нүктелері облыстың ішкі нүктелері.

(19.2) – формуланы қолдану үшін үшінші нүктелер (z_3,w_3) жетіспей тұр, олай болса біз симметриялы нүктелердің сақталу қасиетін қолданамыз.

$z=2i$ және $w=2i$ нүктелеріне сәйкес шеңбермен салыстырғанда симметриялы нүктелерді табайық.

$z=2i$ нүктесіне $|z-2i|=2$ шеңберімен салыстырғанда симметриялы нүкте $z^*=\infty$, себебі $2i$ – дөңгелектің центрі. Сонымен, $z_3=\infty$.

Енді $w=2i$ нүктесіне $|w+2i|=2$ шеңберімен салыстырғанда симметриялы нүктені (19.4) – формуланы қолданып табамыз.

$$|2i+2i|\cdot|w^*+2i|=2^2 \quad \text{немесе} \quad |w^*+2i|=1$$

Соңғы теңдіктен w^* нүктесінің, $|w+2i|=2$ шеңберінің центрі $(-2i)$ нүктесінен $d=1$ тең ара қашықтықта орналасқандығы шығады.

Анықтама бойынша w^* мен $2i$ нүктесінің бір сәуленің бойында жататындығын ескерсек, онда $w^*=-i$ екенін байқау қиын емес. Демек, $w_3=-i.$

Сонымен, үш қос нүктелерді таптық:

$$0\to 0,\ \ 2i\to 2i,\ \ \infty\to -i$$

(19.2) – формулаға қойып, салдарын ескерсек,

$$\frac{w-0}{w-2i}\cdot\frac{-i-2i}{-i-0}=\frac{z-0}{z-2i}\Rightarrow\frac{3w}{w-2i}=\frac{z}{z-2i}$$

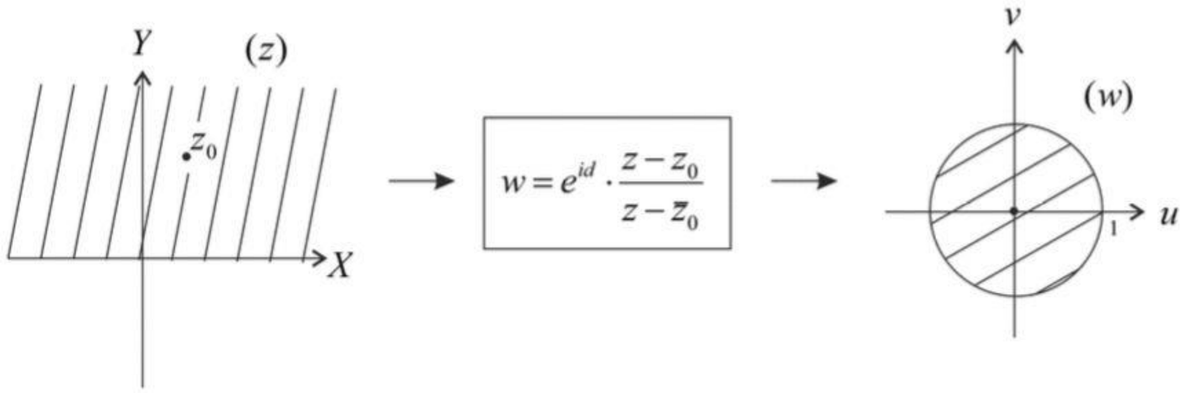
Түрлендіріп $w-$ ны тапсақ, берілген есептің жауабын аламыз:

$$w=\frac{i\,z}{3i-z};$$

Тұжырым. 1. $\operatorname{Im} z>0$ жарты жазықтығын $|w|<1$ дөңгелегіне аударатын кез келген бөлшекті-сызықтық бейнелеу келесі түрде жазылады:

$$w=e^{i\alpha}\cdot\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \tag{19.5}$$

мұнда $\operatorname{Im} z_0 > 0$, α – кез келген нақты сан. (32-сурет)

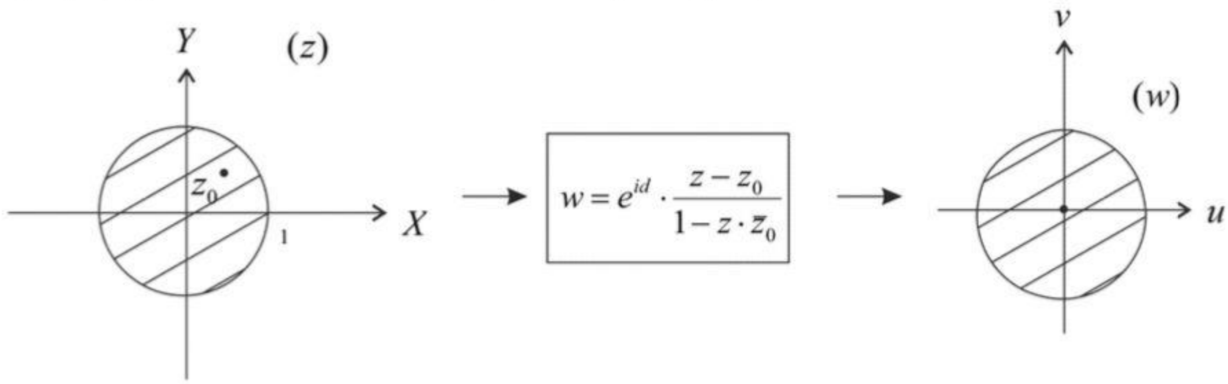


32-сурет

2. $|z|<1$ дөңгелегін $|w|<1$ дөңгелегіне аударатын кез келген бөлшекті-сызықтық бейнелеу келесі түрде жазылады:

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \tag{19.6}$$

мұнда $|z_0|<1$, α – кез келген нақты сан (33-сурет).



33-сурет

3. α – ның мәні қосымша шарттан табылады. Көбінесе w функциясы туындысының аргументі нүктеде беріледі, мысалы $\arg w'(z_0) = \beta$.

11-мысал. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ шарттары орындалатындай және бірлік дөңгелекті өзіне конформды бейнелейтін $w = f(z)$ функциясын табыңыз.

Шешуі. (19.6) – формуласы бойынша $|z|<1$ бірлік дөңгелекті $|w|<1$ бірлік дөңгелегіне бейнелеуге болады:

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

Есептің шарты бойынша $z_0 = \frac{1}{2}$ нүктесі $w = 0$ центріне көшетіндіктен

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - z \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow w = e^{i\alpha} \cdot \frac{2z - 1}{2 - z}$$

Енді $f'(z)$ табайық.

$$f'(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{2(2-z)+2z-1}{(2-z)^2} = e^{i\alpha} \cdot \frac{3}{(2-z)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\alpha} \cdot \frac{3}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}e^{i\alpha}$$

Есептің шарты бойынша

$$\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \arg\left(\frac{4}{3}e^{i\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Демек, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, онда

$$f(z) = i \cdot \frac{2z-1}{2-z};$$

3. Негізгі қарапайым функциялармен орындалатын конформды бейнелеулер

а) ***Дәрежелік функция*** $w = z^n$, мұнда $n \geq 2$ – бүтін оң сан.

Тұжырым. 1. $w = z^n$ бейнелеуі C жазықтығында бірбетті емес, бірбеттілік облыс – бұрышы $\frac{2\pi}{n}$ тең сектор, демек, $\alpha < \beta < \alpha + \frac{2\pi}{n}$, (мұнда α – кез келген) секторында функция бірбетті;

2. $w = z^n$ функциясы C жазықтығында аналитикалық және $w' = nz^{n-1}$, демек, кез келген $z \neq 0$ үшін $w'(z) \neq 0$.

Олай болса, $w = z^n$ бейнелеуі $z = 0$ нүктесінен басқа бүкіл C жазықтығында конформды.

3. $w = z^n$ функциясы кез келген $k \cdot \frac{2\pi}{n} < \arg z < (k+1)\frac{2\pi}{n}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ секторын $[0; +\infty)$ сәулесі бойымен қиылған жазықтыққа конформды және өзара бірмәнді бейнелейді.

4. $w = z^n$ бірбетті емес (n – бетті) функцияға кері функция, $w = \sqrt[n]{z}$ функциясы бірмәнді емес (n – мәнді). $z = 0$ және $z = \infty$ нүктелері (функцияның тармақталу нүктелері) жатпайтын облыста бірмәнді тармақтарын бөліп алуға мүмкіндік бар. Әр тармағы $[0; +\infty)$ сәулесі бойымен қиылған жазықтықты $k \cdot \frac{2\pi}{n} < \arg z < (k+1)\frac{2\pi}{n}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ секторларының біреуіне бейнелейді.

Тұжырым. 1. $w = z^n$ бейнелеуі, бас нүкте арқылы өтетін кез келген түзулер арасындағы бұрышты n есе үлкейтеді, сондықтан $w = z^n$ бейнелеуін бұрышты үлкейту кезінде қолданады.

2. $w = \sqrt[n]{z}$ бейнелеуі, бас нүкте арқылы өтетін кез келген түзулер арасындағы бұрышты n есе кемітеді, демек, $w = \sqrt[n]{z}$ бейнелеуін бұрышты кішірейту кезінде қолданады.

3. Бөлшекті-сызықтық бейнелеу мен $w = z^n$ немесе $w = \sqrt[n]{z}$ бейнелеулерінің комбинацияларын қолданып, екі қиылысатын шеңберлердің

Жауабы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(2x+1)\cos 3x}{x^2+2x+5}dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(2x+1)e^{3ix}}{x^2+2x+5}dx\right)=$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{2e^6}(-1+4i)(\cos 3 - i\sin 3)\right)=\frac{\pi}{2e^6}(4\sin 3-\cos 3).$$

Ал егер (17.8) – формуланы қолдансақ, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(2x+1)\cos 3x}{x^2+2x+5}dx = -2\pi\ \mathrm{Im}\left(\frac{(-1+4i)}{4i}e^{-6-3i}\right)$$

мұнда

$$\frac{(-1+4i)}{4i}e^{-6-3i}=\frac{1}{4e^6}(4+i)(\cos 3 - i\sin 3)=$$

$$=\frac{1}{4e^6}((4\cos 3+\sin 3)+i(\cos 3-4\sin 3))$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{(-1+4i)}{4i}e^{-6-3i}\right)=\frac{1}{4e^6}(\cos 3-4\sin 3).$$

Демек, жауабы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(2x+1)\cos 3x}{x^2+2x+5}dx = -2\pi\ \mathrm{Im}\left(\frac{(-1+4i)}{4i}e^{-6-3i}\right)=$$

$$=-2\pi\cdot\frac{1}{4e^6}(\cos 3-4\sin 3)=\frac{\pi}{2e^6}(4\sin 3-\cos 3)$$

12-мысал. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2(x^2+9)}dx$ меншіксіз интегралын есептеңіз.

Шешуі. $R(z)=\frac{\cos z}{(z^2+4)^2(z^2+9)}$ функциясының ерекше нүктелерін табамыз: $z_1=2i,\ z_2=-2i,\ z_3=3i,\ z_4=-3i.$

$\lambda=1>0$ болғандықтан, тек $z_1=2i$ және $z_3=3i$ нүктелерін қарастырамыз, мұнда $z_2=2i$ – екінші ретті полюс, $z_3=3i$ – бірінші ретті полюс. Осы нүктелердегі шегерімдерін есептейік:

$$\underset{z=2i}{res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z^2+9)}\right)=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z^2+9)}\cdot(z-2i)^2\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z^2+9)}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}(i(z+2i)^2(z^2+9)-2(z+2i)(z^2+9)-2z(z+2i)^2)}{(z+2i)^4(z^2+9)^2}=$$

$$=\frac{e^{-2}(-80i-40i+64i)}{4^4\cdot 25}=-\frac{7i}{480}e^{-2}$$

$$\underset{z=3i}{res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z^2+9)}\right)=\lim_{z\to 3i}\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2(z-3i)(z+3i)}\cdot(z-3i)=$$

іздеп отырған бейнелеуіміз шығады.

$$w = \frac{(1+i)^2}{4} \cdot \left(\frac{z}{z-(1+i)} \right)^2$$

Демек, берілген есептің жауабы: $w = \frac{i}{2} \cdot \left(\frac{z}{z-(1+i)} \right)^2$.

b) ***Көрсеткіштік функция.***

$w = e^z$ бейнелеуі бүкіл жазықтықта конформды, себебі кез келген ақырлы z үшін $w' = e^z \neq 0$.

$w = e^z$ функциясы $2\pi i$ периодты шексіз бетті функция екендігі белгілі (**§4** - қараңыз). Демек, кез келген $y_0 \le y \le y_0 + 2\pi$ жолағында $w = e^z$ функциясы бірбетті.

Егер z жазықтығы

$$2k\pi < y < 2(k+1)\pi, \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

жолақтарына бөлінсе, онда әрбір жолақты $w = e^z$ функциясы, нақты осьтің оң бөлігінің бойымен қиылған w жазықтығына өзара бірмәнді бейнелейді.

c) ***Логарифмдік функция***.

$w = Ln\, z$ функциясы, көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады. Логарифмнің бас мәнін қарастырамыз.

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \ \ -\pi < \arg z \le \pi$$

Бұл функция барлық ақырлы $z \neq 0$ нүктелерінде аналитикалық және $w' = \frac{1}{z} \neq 0$.

Демек, $w = \ln z$ бейнелеуі барлық осындай нүктелерде конформды.

$z = 0$ және $z = \infty$ нүктелері $w = Ln\, z$ функциясының тармақталу нүктелері болып табылады.

d) ***Тригонометриялық функциялар***.

$w = \sin z$ және $w = \cos z$ функциялары кез келген комплекс z үшін келесі теңдікпен анықталады:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

(b-пунктін қараңыз).

e) ***Жуковский функциясы.***

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$z = 0$ нүктесінен басқа бүкіл жазықтықта аналитикалық болады, $z = 0$ нүктесінде бірінші ретті полюс.

Жуковский функциясының туындысы $z \neq \pm 1$ болса, $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \neq 0.$

Демек, $z = \pm 1$ нүктелерінен басқа бүкіл жазықтықта бұл бейнелеу конформды.

Конформдық бейнелеулердің толық кестесін [13] әдебиеттен қарауға болады.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.